Динь Чунг Хоа, О. Е. Тихонов

Казань, Oleg.Tikhonov@ksu.ru

ВЗВЕШЕННЫЕ НЕРАВЕНСТВА МОНОТОННОСТИ ДЛЯ СЛЕДОВ НА ОПЕРАТОРНЫХ АЛГЕБРАХ

В работе [1] для эрмитовых матриц A, B, вещественных функций f и неотрицательных весовых функций w изучались неравенства

$$\mathrm{Tr}(w(A)f(A)) \leqslant \mathrm{Tr}(w(A)f(B)) \quad (A \leqslant B).$$

Такис неравенства можно рассматривать как промежуточный случай между хорошо изученными матричными неравенствами, $f(A) \leqslant f(B)$, и неравенствами монотонности для следа $\mathrm{Tr}(f(A)) \leqslant \mathrm{Tr}(f(B))$.

Приведем некоторые утверждения из работы [2], цель которой состояла в перенесении результатов [1] со случая следа на полной матричной алгебре на следы на алгебрах фон Неймана (афН) и C^*-алгебрах.

Всюду далее через $\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$ и $\mathcal{M}^+$ обозначаем соответственно подмножества самосопряженных и положительных элементов афН $\mathcal{M}$. Через $\sigma(A)$ обозначаем спектр оператора A.

Теорема 1. *Пусть τ — точный, нормальный, положительный следовый функционал на некоммутативной афН $\mathcal{M}$. Пусть $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ — борелевская функция, ограниченная на ограниченных подмножествах $\mathbb{R}^+$. Тогда неравенство $\tau(A^{1/2}f(A)A^{1/2}) \leqslant \tau(A^{1/2}f(B)A^{1/2})$ имеет место для любой пары $A, B \in \mathcal{M}^+$, такой, что $A \leqslant B$, тогда и только тогда, когда функция $g(x) = xf(x)$ выпукла на $\mathbb{R}^+$.*

Теорема 2. *Пусть τ — полунепрерывный снизу по норме след на афН $\mathcal{M}$, f — непрерывная, неотрицательная, выпуклая, монотонно неубывающая функция на выпуклом подмножестве Ω числовой прямой, w — неотрицательная борелевская функция на Ω, ограниченная на компактных подмножествах Ω. Тогда*

$$\tau(w(A)^{1/2}f(A)w(A)^{1/2}) \leqslant \tau(w(A)^{1/2}f(B)w(A)^{1/2})$$

для любой пары операторов $A, B \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$, таких, что $\sigma(A)$, $\sigma(B) \subset \Omega$ и $A \leqslant B$. В случае конечного следа условие неотрицательности функции f можно отбросить.

Некоторые из рассмотренных неравенств выделяют следы в определенных классах весов на операторных алгебрах:

Теорема 3. *Пусть r — неотрицательное число, и пусть φ — такой нормальный полуконечный вес на афН $\mathcal{M}$, что $\varphi(A^{2r+2}) \leqslant \varphi(A^r B^2 A^r)$ для любых A, $B \in \mathcal{M}^+$, удовлетворяющих равенству $A \leqslant B$. Тогда φ — след.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Dinh Trung Hoa, Tikhonov O. E. *Weighted trace inequalities of monotonicity* // Lobachevskii J. Math. – 2007. – V. 26. – P. 63–67.

2. Динь Чунг Хоа, Тихонов О. Е. *Взвешенные неравенства монотонности для следов на операторных алгебрах* // Препринты НИИММ КГУ. – Препринт 0001–2009. – Казань, 2009. – 8 с. – http://www.niimm.ksu/data/preprints/thepreprints/0001-2009.pdf